ISSN 2686-9667. Вестник российских университетов. Математика

Том 28, № 141 2023

НАУЧНАЯ СТАТЬЯ

DOI 10.20310/2686-9667-2023-28-141-68-89
УДК 517.983.6

Об операторных функциях операторного переменного

Василий Ильич ФОМИН
ФГБОУ ВО «Тамбовский государственный университет им. Г.Р. Державина»
392000, Российская Федерация, г. Тамбов, ул. Интернациональная, 33

Аннотация. Рассмотрено семейство операторных функций, для которых область определения и область значений включены в вещественную банахову алгебру ограниченных линейных операторов, действующих в вещественном банаховом пространстве. Такие функции находят применение при изучении линейных дифференциальных уравнений в банаховом пространстве. Изучены известные операторные функции: экспонента, синус, косинус, гиперболический синус, гиперболический косинус, определяемые суммами соответствующих операторных степенных рядов. Для функций синус, косинус, гиперболический синус, гиперболический косинус указаны формулы сложения, из которых следуют формулы преобразования произведения операторных тригонометрических функций и операторных гиперболических функций в сумму, формулы преобразования суммы и разности одноименных операторных тригонометрических функций и одноименных операторных гиперболических функций в произведение. Доказано основное операторное гиперболическое тождество. Введены понятия следующих операторных функций: тангенс, котангенс, секанс, косеканс, гиперболический тангенс, гиперболический котангенс, гиперболический секанс, гиперболический косеканс. Доказаны периодичность операторных тригонометрических функций синус, косинус, тангенс, котангенс и формулы приведения для них. Найдены взаимосвязи между операторными функциями тангенс и котангенс, гиперболический тангенс и гиперболический котангенс. Указано одно полезное применение полученных операторных тригонометрических формул: доказано, что операторные функции $Y_1(t) = \sin Bt$, $Y_2(t) = \cos Bt$ бесконечно дифференцируемы на $\mathbb{R}$; найдены формулы для производных любого порядка этих функций.

Ключевые слова: операторная показательная функция, операторные тригонометрические функции, периодичность операторных тригонометрических функций, формула приведения, операторный секанс, операторный косеканс, операторные гиперболические функции, основное операторное гиперболическое тождество, операторный гиперболический секанс, операторный гиперболический косеканс

Для цитирования: *Фомин В.И.* Об операторных функциях операторного переменного // Вестник российских университетов. Математика. 2023. Т. 28. № 141. С. 68–89. DOI 10.20310/2686-9667-2023-28-141-68-89.

SCIENTIFIC ARTICLES

DOI 10.20310/2686-9667-2023-28-141-68-89

About operator functions of an operator variable

Vasiliy I. FOMIN
Derzhavin Tambov State University
33 Internatsionalnaya St., Tambov 392000, Russian Federation

Abstract. A family of operator functions for which the domain and the range of values are included in the real Banach algebra of bounded linear operators acting in a real Banach space is considered. Such functions find application in the study of linear differential equations in a Banach space. Known operator functions are studied: exponential, sine, cosine, hyperbolic sine, hyperbolic cosine determined by the sums of the corresponding operator power series. For the functions of sine, cosine, hyperbolic sine, hyperbolic cosine, addition formulas are indicated, from which there follow the formulas for transforming the product of operator trigonometric functions and operator hyperbolic functions into a sum as well as those for transforming the sum and difference of operator trigonometric functions of the same name and operator hyperbolic functions of the same name into a product. The basic operator hyperbolic identity is proved. The concepts of the following operator functions are introduced: tangent, cotangent, secant, cosecant, hyperbolic tangent, hyperbolic cotangent, hyperbolic secant, hyperbolic cosecant. The periodicity of operator trigonometric functions of sine, cosine, tangent, cotangent, and the reduction formulas for them are proved. Relationships between operator functions of tangent and cotangent, hyperbolic tangent and hyperbolic cotangent are found. One useful application of the obtained operator trigonometric formulas is pointed out: it is proved that the operator functions $Y_1(t) = sinBt$, $Y_2(t) = cosBt$ are infinitely differentiable on $\mathbb{R}$; formulas for the derivatives of any order of these functions are found.

Keywords: operator exponential function, operator trigonometric functions, periodicity of operator trigonometric functions, reduction formula, operator secant, operator cosecant, operator hyperbolic functions, basic operator hyperbolic identity, operator hyperbolic secant, operator hyperbolic cosecant

Mathematics Subject Classification: 47A60

For citation: Fomin V.I. About operator functions of an operator variable. *Vestnik rossiyskikh universitetov. Matematika = Russian Universities Reports. Mathematics*, 2023, vol. 28, no. 141, pp. 68–89. DOI 10.20310/2686-9667-2023-28-141-68-89. (In Russian, Abstr. in Engl.)

Введение

Пусть E — вещественное банахово пространство; I, O — тождественный и, соответственно, нулевой операторы в пространстве E; $L(E)$ — вещественная банахова алгебра ограниченных линейных операторов, действующих из E в E;

$$GL(E) = \{A \in L(E) : \exists A^{-1} \in L(E)\}.$$

В данной статье рассматриваются операторные функции со значениями в алгебре $L(E)$. Такие функции широко используются при изучении линейных дифференциальных уравнений в банаховом пространстве (см., например, [1–4]).

Рассмотрим следующие семейства операторных функций:

$$S(\mathbb{R}, L(E)) = \{f : \mathbb{R} \supseteq D(f) \xrightarrow{f} R(f) \subseteq L(E)\}, \tag{0.1}$$

$$S(L(E), L(E)) = \{f : L(E) \supseteq D(f) \xrightarrow{f} R(f) \subseteq L(E)\}. \tag{0.2}$$

Примерами операторных функций из семейства (0.1) являются следующие функции, определенные на $\mathbb{R}$:

операторная экспонента (см. [2, с. 41])

$$e^{At} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k A^k}{k!};$$

операторные тригонометрические функции (см. [5, 6])

$$\sin Bt = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{t^{2k+1} B^{2k+1}}{(2k+1)!}; \quad \cos Bt = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{t^{2k} B^{2k}}{(2k)!}$$

(здесь A, B — фиксированные операторы из алгебры $L(E)$).

Простейшими примерами операторных функций из семейства (0.2) являются следующие функции, определенные на $L(E)$: операторная степенная функция X^n, $n \in \mathbb{N}$; операторная рациональная функция

$$P_n(X) = A_0 X^n + A_1 X^{n-1} + \ldots + A_{n-1} X + A_n,$$

где $n \in \mathbb{N}$, $A_i \in L(E)$ для всех $i = \overline{0, n}$, $A_0 \neq O$; в частности, при $A_i = a_i I$, $a_i \in \mathbb{R}$ для всех $i = \overline{0, n}$, $a_0 \neq 0$ получаем операторную рациональную функцию с вещественными коэффициентами

$$P_n(X) = a_0 X^n + a_1 X^{n-1} + \ldots + a_{n-1} X + a_n I.$$

Приведем примеры операторных функций из семейства (0.2), определяемых суммами сходящихся операторных степенных рядов.

Пусть степенной ряд $\sum\limits_{k=0}^{\infty} c_k t^k$ с вещественными коэффициентами сходится при любом $t \in \mathbb{R}$. Тогда при любом $X \in L(E)$ ряд $\sum\limits_{k=0}^{\infty} c_k X^k$ сходится и его сумма принадлежит алгебре $L(E)$ (см. [7, с. 48]). Ряды Маклорена

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!}, \quad \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{t^{2k+1}}{(2k+1)!}, \quad \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{t^{2k}}{(2k)!}, \quad \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^{2k+1}}{(2k+1)!}, \quad \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^{2k}}{(2k)!}$$

соответственно функций e^t, $\sin t$, $\cos t$, $\operatorname{sh} t$, $\operatorname{ch} t$ сходятся при любом $t \in \mathbb{R}$. Следовательно, ряды

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{X^k}{k\,!}, \quad \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{X^{2k+1}}{(2k+1)\,!}, \quad \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{X^{2k}}{(2k)\,!}, \quad \sum_{k=0}^{\infty} \frac{X^{2k+1}}{(2k+1)!}, \quad \sum_{k=0}^{\infty} \frac{X^{2k}}{(2k)!} \tag{0.3}$$

сходятся и их суммы принадлежат алгебре $L(E)$. Это позволяет определить на $L(E)$ следующие операторные функции, принадлежащие семейству (0.2):

экспоненциальная функция (см. [8, с. 127])

$$e^X = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{X^k}{k!};$$

тригонометрические функции (см. [8, с. 132])

$$\sin X = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{X^{2k+1}}{(2k+1)!}; \quad \cos X = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{X^{2k}}{(2k)!};$$

гиперболические функции (см. [8, с. 132])

$$\operatorname{sh} X = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{X^{2k+1}}{(2k+1)!}; \quad \operatorname{ch} X = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{X^{2k}}{(2k)!}.$$

Заметим, что

$$e^O = I; \tag{0.4}$$

$$\sin O = O, \quad \cos O = I; \tag{0.5}$$

$$\sin(-X) = -\sin X, \quad \cos(-X) = \cos X; \tag{0.6}$$

$$\operatorname{sh} O = O, \quad \operatorname{ch} O = I; \tag{0.7}$$

$$\operatorname{sh}(-X) = -\operatorname{sh} X, \quad \operatorname{ch}(-X) = \operatorname{ch} X. \tag{0.8}$$

Каждый из рядов (0.3) сходится абсолютно (это утверждение доказывается с помощью первого признака сравнения и признака Даламбера сходимости знакоположительных рядов, при этом используется неравенство $\|X^n\| \le \|X\|^n$, $n \in \mathbb{N}$).

Известно (см. [8, с. 126]), что из абсолютной сходимости ряда с членами из алгебры $L(E)$ следует его сходимость. В силу этого сходимость рядов (0.3) следует из их абсолютной сходимости (напомним, что сходимость рядов (0.3) была уже доказана выше).

В силу теоремы о перестановке членов абсолютно сходящегося ряда (см. [9, с. 130]) справедливо соотношение (см. [8, с. 132])

$$e^X = \operatorname{sh} X + \operatorname{ch} X. \tag{0.9}$$

В силу (0.8), (0.9)

$$e^{-X} = -\operatorname{sh} X + \operatorname{ch} X. \tag{0.10}$$

Из (0.9), (0.10) следуют равенства

$$\operatorname{sh} X = \frac{e^X - e^{-X}}{2}, \quad \operatorname{ch} X = \frac{e^X + e^{-X}}{2}. \tag{0.11}$$

Укажем, как операторы из алгебры $L(E)$, определяемые суммами сходящихся рядов, действуют в пространстве E.

Пусть ряд
$$\sum_{k=1}^{\infty} F_k \tag{0.12}$$
с членами из алгебры $L(E)$ сходится и его сумма S принадлежит $L(E)$. По определению, это означает, что последовательность частичных сумм $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} F_k$, $n \in \mathbb{N}$, ряда (0.12) сходится к S (речь идет о сходимости по норме алгебры $L(E)$). Известно (см. [8, с. 127]), что из сходимости последовательности с членами из алгебры $L(E)$ следует ее поточечная сходимость (в иной терминологии сильная сходимость). В силу этого для любого $x \in E$
$$S_n x \to Sx. \tag{0.13}$$
Заметим, что
$$S_n x = \big(\sum_{k=1}^{n} F_k\big)x = \sum_{k=1}^{n} F_k x$$
является n-й частичной суммой ряда
$$\sum_{k=1}^{\infty} F_k x. \tag{0.14}$$
Следовательно, в силу (0.13) ряд (0.14) сходится и его сумма равна Sx :
$$Sx = \sum_{k=1}^{\infty} F_k x.$$

Например, операторы
$$e^A = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!}, \quad \sin B = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{B^{2k+1}}{(2k+1)!}, \quad \cos B = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{B^{2k}}{(2k)!}$$
(здесь $A, B \in L(E)$; A, B фиксированы) действуют в пространстве E соответственно по правилу: для любого $x \in E$
$$e^A x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k x}{k!}, \quad (\sin B)x = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{B^{2k+1}x}{(2k+1)!}, \quad (\cos B)x = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{B^{2k}x}{(2k)!}.$$

1. Основные понятия

Операторные функции $\operatorname{tg} X$, $\operatorname{ctg} X$ операторного переменного $X \in L(E)$ определяются равенствами
$$\operatorname{tg} X = \sin X \cos^{-1} X, \quad \operatorname{ctg} X = \cos X \sin^{-1} X,$$
где $\cos^{-1} X = (\cos X)^{-1}$, $\sin^{-1} X = (\sin X)^{-1}$ — обратные операторы соответственно для операторов $\cos X$, $\sin X$.

Области определения этих функций имеют вид
$$D(\operatorname{tg} X) = \{X \in L(E) : \cos X \in GL(E)\},$$

$$D(\operatorname{ctg} X) = \{X \in L(E) : \sin X \in GL(E)\}.$$

Заметим, что

$$D(\operatorname{tg} X) \cap D(\operatorname{ctg} X) = \{X \in L(E) : \sin X, \cos X \in GL(E)\}.$$

Покажем, что

$$D(\operatorname{tg} X) \neq \emptyset, \quad D(\operatorname{ctg} X) \neq \emptyset, \quad D(\operatorname{tg} X) \cap D(\operatorname{ctg} X) \neq \emptyset. \tag{1.1}$$

Пусть

$$M_1 = \Big\{\alpha \in \mathbb{R} : \alpha \neq \frac{\pi}{2} + \pi m, \quad m \in \mathbb{Z}\Big\}, \quad M_2 = \Big\{\alpha \in \mathbb{R} : \alpha \neq \pi m, \quad m \in \mathbb{Z}\Big\}.$$

Заметим, что M_1, M_2 являются областями определения скалярных функций $\operatorname{tg} \alpha$, $\operatorname{ctg} \alpha$. Определим множество $M = M_1 \cap M_2 = \Big\{\alpha \in \mathbb{R} : \alpha \neq \frac{\pi}{2} k, \quad k \in \mathbb{Z}\Big\}$.

Лемма 1.1. *Справедливы включения*

$$\alpha I \in D(\operatorname{tg} X), \quad \forall \alpha \in M_1; \tag{1.2}$$

$$\alpha I \in D(\operatorname{ctg} X), \quad \forall \alpha \in M_2; \tag{1.3}$$

$$\alpha I \in D(\operatorname{tg} X) \cap D(\operatorname{ctg} X), \quad \forall \alpha \in M. \tag{1.4}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Используя определения функций $\sin X$, $\cos X$ и равенство $I^n = I$, $n \in \mathbb{N}$, получаем

$$\sin(\alpha I) = I \sin \alpha, \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}; \tag{1.5}$$

$$\cos(\alpha I) = I \cos \alpha, \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}. \tag{1.6}$$

Из равенства (1.6) следует, что существует

$$\cos^{-1}(\alpha I) = \frac{1}{\cos \alpha} I, \quad \forall \alpha \in M_1, \tag{1.7}$$

значит, определен $\operatorname{tg}(\alpha I) = \sin(\alpha I) \cos^{-1}(\alpha I)$. Включение (1.2) доказано. Далее, из равенства (1.5) видно, что существует

$$\sin^{-1}(\alpha I) = \frac{1}{\sin \alpha} I, \quad \forall \alpha \in M_2, \tag{1.8}$$

следовательно, определен $\operatorname{ctg}(\alpha I) = \cos(\alpha I) \sin^{-1}(\alpha I)$. Включение (1.3) доказано. Включение (1.4) следует из (1.2), (1.3). $\square$

В силу леммы 1.1 справедливы соотношения (1.1).

В силу (1.5)–(1.8)

$$\operatorname{tg}(\alpha I) = I \ \operatorname{tg} \alpha, \quad \forall \alpha \in M_1;$$

$$\operatorname{ctg}(\alpha I) = I \ \operatorname{ctg} \alpha, \quad \forall \alpha \in M_2.$$

В силу (0.5), (0.6)

$$\operatorname{tg} O = O, \quad O \notin D(\operatorname{ctg} X), \quad \operatorname{tg}(-X) = -\operatorname{tg} X, \quad \operatorname{ctg}(-X) = -\operatorname{ctg} X.$$

Пусть $X \in L(E)$, $r > 0$. Обозначим через $O_r(X) = \{H \in L(E) : \|H - X\| < r\}$ открытый шар в пространстве $L(E)$ с центром $X \in L(E)$ радиуса r.

Известно (см. [10, с. 229]), что множество $GL(E)$ открыто: если $F_0 \in GL(E)$, то

$$O_{\|F_0^{-1}\|^{-1}}(F_0) \subset GL(E).$$

Пусть $\alpha \in M_1$, α фиксировано. В силу (1.7) $A_\alpha = \cos(\alpha I) \in GL(E)$. Следовательно,

$$O_{\|A_\alpha^{-1}\|^{-1}}(A_\alpha) \subset GL(E).$$

Из (1.7) следует, что

$$\|A_\alpha^{-1}\|^{-1} = |\cos\alpha|. \tag{1.9}$$

Учитывая равенства (1.6), (1.9), имеем

$$O_{|\cos\alpha|}(I\cos\alpha) \subset GL(E). \tag{1.10}$$

Положим

$$P_\alpha = \{F \in L(E) : \|\cos F - I\cos\alpha\| < |\cos\alpha|\},$$

т. е.

$$P_\alpha = \{F \in L(E) : \cos F \in O_{|\cos\alpha|}(I\cos\alpha)\}.$$

В силу включения (1.10)

$$\cos F \in GL(E), \quad \forall F \in P_\alpha.$$

Таким образом,

$$P_\alpha \subset D(\operatorname{tg} X), \quad \forall \alpha \in M_1. \tag{1.11}$$

В частности, множество $P_0 = \{F \in L(E) : \|\cos F - I\| < 1\}$ включено в $D(\operatorname{tg} X)$.

Аналогично для множества

$$Q_\alpha = \{F \in L(E) : \|\sin F - I\sin\alpha\| < |\sin\alpha|\}$$

показывается, что

$$Q_\alpha \subset D(\operatorname{ctg} X), \quad \forall \alpha \in M_2. \tag{1.12}$$

В частности, множество $Q_{\frac{\pi}{2}} = \{F \in L(E) : \|\sin F - I\| < 1\}$ включено в $D(\operatorname{ctg} X)$.

Операторные функции $\sec X$, $\operatorname{cosec} X$ определяются равенствами

$$\sec X = \cos^{-1} X; \quad \operatorname{cosec} X = \sin^{-1} X.$$

Заметим, что

$$D(\sec X) = D(\operatorname{tg} X), \quad D(\operatorname{cosec} X) = D(\operatorname{ctg} X), \tag{1.13}$$

следовательно, в силу (1.2)–(1.4)

$$\alpha I \in D(\sec X), \quad \forall \alpha \in M_1;$$

$$\alpha I \in D(\operatorname{cosec} X), \quad \forall \alpha \in M_2;$$

$$\alpha I \in D(\sec X) \cap D(\operatorname{cosec} X), \quad \forall \alpha \in M.$$

В силу (1.7), (1.8)

$$\sec(\alpha I) = I \sec\alpha, \quad \forall \alpha \in M_1;$$

$$\operatorname{cosec}(\alpha I) = I \operatorname{cosec}\alpha, \quad \forall \alpha \in M_2.$$

В силу (0.5), (0.6)

$$\sec O = I, \quad \mathrm{O} \notin D(\operatorname{cosec} X), \quad \sec(-X) = \sec X, \quad \operatorname{cosec}(-X) = -\operatorname{cosec} X.$$

Заметим, что

$$\cos X \sec X = I, \quad \sin X \operatorname{cosec}\, X = I,$$

$$\operatorname{tg} X = \sin X \sec X, \quad \operatorname{ctg} X = \cos X\, \operatorname{cosec}\, X.$$

В силу (1.11)–(1.13)

$$P_\alpha \subset D(\sec X), \quad \forall \alpha \in M_1;$$

$$Q_\alpha \subset D(\operatorname{cosec}\, X), \quad \forall \alpha \in M_2.$$

Операторные гиперболические функции $\operatorname{th} X$, $\operatorname{cth} X$ определяются равенствами

$$\operatorname{th} X = \operatorname{sh} X \operatorname{ch}^{-1} X; \quad \operatorname{cth} X = \operatorname{ch} X \operatorname{sh}^{-1} X,$$

где $\operatorname{ch}^{-1} X = (\operatorname{ch} X)^{-1}$, $\operatorname{sh}^{-1} X = (\operatorname{sh} X)^{-1}$ — обратные операторы соответственно для операторов $\operatorname{ch} X$, $\operatorname{sh} X$. Для этих функций

$$D(\operatorname{th} X) = \{X \in L(E) : \operatorname{ch} X \in GL(E)\},$$

$$D(\operatorname{cth} X) = \{X \in L(E) : \operatorname{sh} X \in GL(E)\}.$$

Заметим, что

$$D(\operatorname{th} X) \cap D(\operatorname{cth} X) = \{X \in L(E) : \operatorname{sh} X, \operatorname{ch} X \in GL(E)\}.$$

Приведем утверждение, из которого следует, что

$$D(\operatorname{th} X) \neq \emptyset, \quad D(\operatorname{cth} X) \neq \emptyset, \quad D(\operatorname{th} X) \cap D(\operatorname{cth} X) \neq \emptyset. \tag{1.14}$$

Лемма 1.2. *Справедливы включения*

$$\alpha I \in D(\operatorname{th} X), \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}; \tag{1.15}$$

$$\alpha I \in D(\operatorname{cth} X), \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}, \quad \alpha \neq 0; \tag{1.16}$$

$$\alpha I \in D(\operatorname{th} X) \cap D(\operatorname{cth} X), \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}, \quad \alpha \neq 0. \tag{1.17}$$

Доказательство. В силу (0.11)

$$\operatorname{sh}(\alpha I) = 2^{-1}(e^{\alpha I} - e^{-\alpha I}), \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}; \tag{1.18}$$

$$\operatorname{ch}(\alpha I) = 2^{-1}(e^{\alpha I} + e^{-\alpha I}), \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}. \tag{1.19}$$

Используя определение функции e^X, получаем

$$e^{\alpha I} = e^{\alpha} I, \quad e^{-\alpha I} = e^{-\alpha} I, \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}. \tag{1.20}$$

В силу (1.18)–(1.20)

$$\operatorname{sh}(\alpha I) = I \operatorname{sh}\alpha, \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}; \tag{1.21}$$

$$\operatorname{ch}(\alpha I) = I \operatorname{ch}\alpha, \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}. \tag{1.22}$$

Заметим, что

$$\operatorname{sh}\alpha \neq 0, \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}, \quad \alpha \neq 0; \tag{1.23}$$

$$\operatorname{ch}\alpha \neq 0, \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}. \tag{1.24}$$

Из (1.22), (1.24) видно, что существует

$$\operatorname{ch}^{-1}(\alpha I) = \frac{1}{\operatorname{ch}\alpha} I, \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}, \tag{1.25}$$

следовательно, определен $\operatorname{th}(\alpha I) = \operatorname{sh}(\alpha I)\operatorname{ch}^{-1}(\alpha I)$. Включение (1.15) доказано. Далее, в силу (1.21), (1.23) существует

$$\operatorname{sh}^{-1}(\alpha I) = \frac{1}{\operatorname{sh}\alpha} I, \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}, \quad \alpha \neq 0, \tag{1.26}$$

значит, определен $\operatorname{cth}(\alpha I) = \operatorname{ch}(\alpha I)\operatorname{sh}^{-1}(\alpha I)$. Включение (1.16) доказано. Включение (1.17) следует из (1.15), (1.16). □

В силу леммы 1.2 справедливы соотношения (1.14).

В силу (1.21), (1.22), (1.25), (1.26)

$$\operatorname{th}(\alpha I) = I \operatorname{th}\alpha, \quad \forall \alpha \in \mathbb{R};$$

$$\operatorname{cth}(\alpha I) = I \operatorname{cth}\alpha, \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}, \quad \alpha \neq 0.$$

В силу (0.7), (0.8)

$$\operatorname{th} O = O, \quad O \notin D(\operatorname{cth} X), \quad \operatorname{th}(-X) = -\operatorname{th} X, \quad \operatorname{cth}(-X) = -\operatorname{cth} X.$$

При любом $\alpha \in \mathbb{R}$ определим множество $U_\alpha = \{F \in L(E) : \|\operatorname{ch} F - I \operatorname{ch}\alpha\| < |\operatorname{ch}\alpha|\}$. По аналогии с включением (1.11) получаем

$$U_\alpha \subset D(\operatorname{th} X), \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}. \tag{1.27}$$

В частности, множество $U_0 = \{F \in L(E) : \|\operatorname{ch} F - I\| < 1\}$ включено в $D(\operatorname{th} X)$.

Для произвольного $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha \neq 0$, положим $V_\alpha = \{F \in L(E) : \|\operatorname{sh} F - I \operatorname{sh}\alpha\| < |\operatorname{sh}\alpha|\}$. По аналогии с включением (1.12) имеем

$$V_\alpha \subset D(\operatorname{cth} X), \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}, \quad \alpha \neq 0. \tag{1.28}$$

В частности, множество $V_{\operatorname{arsh} 1} = \{F \in L(E) : \|\operatorname{sh} F - I\| < 1\}$ включено в $D(\operatorname{cth} X)$.

Операторные гиперболические секанс и косеканс определяются равенствами

$$\operatorname{sech} X = \operatorname{ch}^{-1} X; \quad \operatorname{cosech} X = \operatorname{sh}^{-1} X.$$

Заметим, что

$$D(\operatorname{sech} X) = D(\operatorname{th} X), \quad D(\operatorname{cosech} X) = D(\operatorname{cth} X), \tag{1.29}$$

следовательно, в силу (1.15)–(1.17)

$$\alpha I \in D(\operatorname{sech} X), \quad \forall \alpha \in \mathbb{R};$$

$$\alpha I \in D(\operatorname{cosech} X), \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}, \quad \alpha \neq 0;$$

$$\alpha I \in D(\operatorname{sech} X) \cap D(\operatorname{cosech} X), \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}, \quad \alpha \neq 0.$$

В силу (1.25), (1.26)

$$\operatorname{sech}(\alpha I) = I \operatorname{sech} \alpha, \quad \forall \alpha \in \mathbb{R};$$

$$\operatorname{cosech}(\alpha I) = I \operatorname{cosech} \alpha, \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}, \quad \alpha \neq 0.$$

В силу (0.7), (0.8)

$$\operatorname{sech} O = I, \quad \mathrm{O} \notin D(\operatorname{cosech} X), \quad \operatorname{sech}(-X) = \operatorname{sech} X, \quad \operatorname{cosech}(-X) = -\operatorname{cosech} X.$$

Заметим, что

$$\operatorname{ch} X \operatorname{sech} X = I, \quad \operatorname{sh} X \operatorname{cosech} X = I.$$

В силу (1.27)–(1.29)

$$U_\alpha \subset D(\operatorname{sech} X), \quad \forall \alpha \in \mathbb{R};$$

$$V_\alpha \subset D(\operatorname{cosech} X), \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}, \quad \alpha \neq 0.$$

2. Основные результаты

Справедливо основное свойство экспоненциальной функции (см. [2, с. 41])

$$e^{X_1+X_2} = e^{X_1} e^{X_2}, \tag{2.1}$$

длю любых $X_1, X_2 \in L(E)$, удовлетворяющих условию

$$X_1 X_2 = X_2 X_1. \tag{2.2}$$

Используя равенства (0.4), (2.1), приходим к выводу: при любом фиксированном $X \in L(E)$ существует $(e^X)^{-1} = e^{-X}$, т. е. $e^X \in GL(E)$. Таким образом, область значений $R(e^X)$ функции e^X является подмножеством множества $GL(E) \subset L(E)$, следовательно, $R(e^X) \neq L(E)$, т. е. функция e^X не является сюръективной. Заметим, что любой оператор $F \in L(E) \setminus GL(E)$ не принадлежит множеству $R(e^X)$. Например, $O \notin R(e^X)$, т. е. функция e^X не имеет нулей: $e^X \neq O$ для любого $X \in L(E)$.

Рассмотрим в алгебре $L(E)$ подалгебру $S = \{\alpha I : \alpha \in \mathbb{R}\}$ скалярных операторов. Заметим, что подалгебра S коммутативна. Выделим в S множество $S_+ = \{\beta I : \beta > 0\}$ положительных скалярных операторов. Справедливо включение $S_+ \subset R(e^X)$, ибо для любого $\beta I \in S_+$, используя (1.20), получаем

$$e^{I \ln \beta} = e^{\ln \beta} I = \beta I.$$

Попутно показано, что натуральный логарифм положительного скалярного оператора βI имеет вид $\ln(\beta I) = I \ln \beta$.

Используя теорему 61 из [9, с. 138] при $B : L(E) \times L(E) \to L(E)$, $B(F_1, F_2) = F_1 F_2$, получаем

Следствие 2.1. *Произведение двух абсолютно сходящихся рядов с членами из алгебры $L(E)$ является абсолютно сходящимся рядом и его сумма равна произведению сумм перемножаемых рядов.*

С помощью следствия 2.1 доказываются некоторые формулы операторной тригонометрии (см. [11]). Например, основное операторное тригонометрическое тождество

$$\sin^2 X + \cos^2 X = I, \quad \forall X \in L(E);$$

формулы сложения

$$\sin(X_1 + X_2) = \sin X_1 \cos X_2 + \cos X_1 \sin X_2, \tag{2.3}$$

$$\cos(X_1 + X_2) = \cos X_1 \cos X_2 - \sin X_1 \sin X_2 \tag{2.4}$$

для любых $X_1, X_2 \in L(E)$, удовлетворяющих условию (2.2).

В силу (2.3), (2.4) справедливы формулы для операторных тригонометрических функций двойного аргумента: для любого $X \in L(E)$

$$\sin 2X = 2\sin X \cos X, \quad \cos 2X = \cos^2 X - \sin^2 X.$$

В силу (0.6), (2.3), (2.4)

$$\sin(X_1 - X_2) = \sin X_1 \cos X_2 - \cos X_1 \sin X_2, \tag{2.5}$$

$$\cos(X_1 - X_2) = \cos X_1 \cos X_2 + \sin X_1 \sin X_2. \tag{2.6}$$

Из (2.3)–(2.6) следуют формулы преобразования произведения операторных тригонометрических функций в сумму:

$$\sin X_1 \cos X_2 = \frac{1}{2}\big[\sin(X_1 + X_2) + \sin(X_1 - X_2)\big], \tag{2.7}$$

$$\cos X_1 \cos X_2 = \frac{1}{2}\big[\cos(X_1 + X_2) + \cos(X_1 - X_2)\big], \tag{2.8}$$

$$\sin X_1 \sin X_2 = \frac{1}{2}\big[\cos(X_1 - X_2) - \cos(X_1 + X_2)\big]. \tag{2.9}$$

Из (2.7)–(2.9) следуют формулы преобразования суммы и разности одноименных операторных тригонометрических функций в произведение:

$$\sin X_1 + \sin X_2 = 2\sin\frac{X_1 + X_2}{2}\cos\frac{X_1 - X_2}{2}, \tag{2.10}$$

$$\sin X_1 - \sin X_2 = 2\sin\frac{X_1 - X_2}{2}\cos\frac{X_1 + X_2}{2}, \tag{2.11}$$

$$\cos X_1 + \cos X_2 = 2\cos\frac{X_1 + X_2}{2}\cos\frac{X_1 - X_2}{2}, \tag{2.12}$$

$$\cos X_1 - \cos X_2 = -2\sin\frac{X_1 - X_2}{2}\sin\frac{X_1 + X_2}{2}. \tag{2.13}$$

Напомним, что формулы (2.3)–(2.13) справедливы при выполнении условия (2.2).

Покажем периодичность операторных тригонометрических функций.

Теорема 2.1. *Для любого* $m \in \mathbb{Z}$, $m \neq 0$, *справедливы равенства*

$$\sin(X + 2\pi mI) = \sin X, \quad \forall X \in L(E); \tag{2.14}$$

$$\cos(X + 2\pi mI) = \cos X, \quad \forall X \in L(E); \tag{2.15}$$

$$\operatorname{tg}(X + \pi mI) = \operatorname{tg} X, \quad \forall X \in D(\operatorname{tg} X); \tag{2.16}$$

$$\operatorname{ctg}(X + \pi mI) = \operatorname{ctg} X, \quad \forall X \in D(\operatorname{ctg} X). \tag{2.17}$$

Доказательство. Операторы X, $2\pi mI$ коммутируют между собой, следовательно, в силу (2.3), (2.4)

$$\sin(X + 2\pi mI) = \sin X \cos(2\pi mI) + \cos X \sin(2\pi mI), \tag{2.18}$$

$$\cos(X + 2\pi mI) = \cos X \cos(2\pi mI) - \sin X \sin(2\pi mI). \tag{2.19}$$

В силу (1.5), (1.6)

$$\sin(2\pi mI) = O, \quad \cos(2\pi mI) = I. \tag{2.20}$$

Из соотношений (2.18)–(2.20) следуют равенства (2.14), (2.15).

Покажем справедливость равенств (2.16), (2.17). В силу (2.3), (2.4)

$$\sin(X + \pi mI) = \sin X \cos(\pi mI) + \cos X \sin(\pi mI), \tag{2.21}$$

$$\cos(X + \pi mI) = \cos X \cos(\pi mI) - \sin X \sin(\pi mI). \tag{2.22}$$

В силу (1.5), (1.6)

$$\sin(\pi mI) = O, \quad \cos(\pi mI) = (-1)^m I. \tag{2.23}$$

В силу (2.21)–(2.23)

$$\sin(X + \pi mI) = (-1)^m \sin X, \tag{2.24}$$

$$\cos(X + \pi mI) = (-1)^m \cos X, \tag{2.25}$$

следовательно, существуют

$$\sin^{-1}(X + \pi mI) = (-1)^{-m} \sin^{-1} X, \quad \forall X \in D(\operatorname{ctg} X); \tag{2.26}$$

$$\cos^{-1}(X + \pi mI) = (-1)^{-m} \cos^{-1} X, \quad \forall X \in D(\operatorname{tg} X). \tag{2.27}$$

Из (2.27) видно, что для любого $X \in D(\operatorname{tg} X)$ определен

$$\operatorname{tg}(X + \pi mI) = \sin(X + \pi mI) \cos^{-1}(X + \pi mI),$$

т. е. $X + \pi mI \in D(\operatorname{tg} X)$. Из (2.26) следует, что для любого $X \in D(\operatorname{ctg} X)$ определен

$$\operatorname{ctg}(X + \pi mI) = \cos(X + \pi mI) \sin^{-1}(X + \pi mI),$$

т. е. $X + \pi mI \in D(\operatorname{ctg} X)$. В силу (2.24), (2.27) для любого $X \in D(\operatorname{tg} X)$ получаем

$$\operatorname{tg}(X + \pi mI) = (-1)^m \sin X \cdot (-1)^{-m} \cos^{-1} X = \sin X \cos^{-1} X = \operatorname{tg} X;$$

а для любого $X \in D(\operatorname{ctg} X)$ в силу (2.25), (2.26) имеем

$$\operatorname{ctg}(X + \pi mI) = (-1)^m \cos X \cdot (-1)^{-m} \sin^{-1} X = \cos X \sin^{-1} X = \operatorname{ctg} X.$$

Равенства (2.16), (2.17) доказаны. $\square$

В качестве основного периода берется для функций $\sin X, \cos X$ оператор $T_1 = 2\pi I$, для функций $\operatorname{tg} X, \operatorname{ctg} X$ оператор $T_1 = \pi I$.

Покажем, что для операторных тригонометрических функций справедливы стандартные формулы приведения.

Теорема 2.2. *Для любого* $X \in L(E)$

$$\sin\big(X + \pi I\big) = -\sin X, \quad \cos\big(X + \pi I\big) = -\cos X, \tag{2.28}$$

$$\sin\big(X + \frac{\pi}{2} I\big) = \cos X, \quad \cos\big(X + \frac{\pi}{2} I\big) = -\sin X. \tag{2.29}$$

Для любого $X \in D(\operatorname{tg} X) \cap D(\operatorname{ctg} X)$

$$\operatorname{tg}\big(X + \frac{\pi}{2} I\big) = -\operatorname{ctg} X, \quad \operatorname{ctg}\big(X + \frac{\pi}{2} I\big) = -\operatorname{tg} X. \tag{2.30}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Формулы (2.28) следуют из (2.24), (2.25) при $m = 1$.

Покажем справедливость формул (2.29). В силу (2.3), (2.4)

$$\sin\big(X + \frac{\pi}{2} I\big) = \sin X \cos\big(\frac{\pi}{2} I\big) + \cos X \sin\big(\frac{\pi}{2} I\big), \tag{2.31}$$

$$\cos\big(X + \frac{\pi}{2} I\big) = \cos X \cos\big(\frac{\pi}{2} I\big) - \sin X \sin(\frac{\pi}{2} I\big). \tag{2.32}$$

В силу (1.5), (1.6)

$$\sin\big(\frac{\pi}{2} I\big) = I, \quad \cos\big(\frac{\pi}{2} I\big) = O. \tag{2.33}$$

Из соотношений (2.31)–(2.33) следуют формулы (2.29).

Убедимся в справедливости формул (2.30). Пусть $X \in D(\operatorname{tg} X) \cap D(\operatorname{ctg} X)$. Из равенств (2.29) видно, что существуют

$$\sin^{-1}\big(X + \frac{\pi}{2} I\big) = \cos^{-1} X, \tag{2.34}$$

$$\cos^{-1}\big(X + \frac{\pi}{2} I\big) = -\sin^{-1} X. \tag{2.35}$$

В силу (2.35) определен $\operatorname{tg}(X + \frac{\pi}{2} I) = \sin(X + \frac{\pi}{2} I)\cos^{-1}(X + \frac{\pi}{2} I)$, т. е.

$$X + \frac{\pi}{2} I \in D(\operatorname{tg} X). \tag{2.36}$$

Из (2.34) видно, что определен $\operatorname{ctg}(X + \frac{\pi}{2} I) = \cos(X + \frac{\pi}{2} I)\sin^{-1}(X + \frac{\pi}{2} I)$, т. е.

$$X + \frac{\pi}{2} I \in D(\operatorname{ctg} X). \tag{2.37}$$

В силу (2.36), (2.37) $X + \dfrac{\pi}{2} I \in D(\operatorname{tg} X) \cap D(\operatorname{ctg} X)$. Из соотношений (2.29), (2.34), (2.35) следуют формулы (2.30). □

Для любого $X \in D(\operatorname{tg} X) \cap D(\operatorname{ctg} X)$ справедливо тождество

$$\operatorname{tg} X \operatorname{ctg} X = I. \tag{2.38}$$

Действительно, используя сочетательное свойство $F_1(F_2F_3) = (F_1F_2)F_3$ алгебры $L(E)$, получаем

$$\begin{aligned}\operatorname{tg} X \operatorname{ctg} X &= (\sin X \cos^{-1} X)(\cos X \sin^{-1} X) = \sin X(\cos^{-1} X(\cos X \sin^{-1} X))\\ &= \sin X((\cos^{-1} X \cos X) \sin^{-1} X) = \sin X(I \sin^{-1} X) = \sin X \sin^{-1} X = I.\end{aligned}$$

Тождество (2.38) доказано.

Известно (см. [8, с. 141]), что если $F_1, F_2 \in GL(E)$, то $F_1F_2 \in GL(E)$ и

$$(F_1F_2)^{-1} = F_2^{-1}F_1^{-1}. \tag{2.39}$$

Используя формулу (2.39), получаем для любого $X \in D(\operatorname{tg} X) \cap D(\operatorname{ctg} X)$

$$\begin{aligned}\operatorname{ctg}^{-1} X &= (\cos X \sin^{-1} X)^{-1} = \sin X \cos^{-1} X = \operatorname{tg} X,\\ \operatorname{tg}^{-1} X &= (\sin X \cos^{-1} X)^{-1} = \cos X \sin^{-1} X = \operatorname{ctg} X,\end{aligned}$$

т. е.

$$\operatorname{tg} X = \operatorname{ctg}^{-1} X, \quad \operatorname{ctg} X = \operatorname{tg}^{-1} X. \tag{2.40}$$

В дальнейшем понадобятся следующие равенства:

$$e^X e^{-X} = e^{-X} e^X = I, \quad \forall X \in L(E); \tag{2.41}$$

$$(A \pm B)^2 = A^2 \pm 2AB + B^2 \tag{2.42}$$

для любых $A, B \in L(E)$, удовлетворяющих условию $AB = BA$.

Некоторые соотношения для скалярных гиперболических функций переносятся на операторные гиперболические функции.

Справедливо основное операторное гиперболическое тождество: для любого $X \in L(E)$

$$\operatorname{ch}^2 X - \operatorname{sh}^2 X = I. \tag{2.43}$$

Действительно, используя соотношения (0.11), (2.1), (2.41), (2.42), получаем

$$\operatorname{ch}^2 X = 4^{-1}(e^{2X} + 2I + e^{-2X}), \quad \operatorname{sh}^2 X = 4^{-1}(e^{2X} - 2I + e^{-2X}),$$

откуда следует тождество (2.43).

Для любого $X \in D(\operatorname{th} X) \cap D(\operatorname{cth} X)$

$$\operatorname{th} X \operatorname{cth} X = I; \tag{2.44}$$

$$\operatorname{th} X = \operatorname{cth}^{-1} X, \quad \operatorname{cth} X = \operatorname{th}^{-1} X. \tag{2.45}$$

Доказательство тождества (2.44) аналогично доказательству соотношения (2.38). Справедливость равенств (2.45) проверяется аналогично тому, как были получены соотношения (2.40).

Для любых $X_1, X_2 \in L(E)$, удовлетворяющих условию (2.2), справедливы формулы сложения:

$$\operatorname{sh}(X_1 + X_2) = \operatorname{sh} X_1 \operatorname{ch} X_2 + \operatorname{ch} X_1 \operatorname{sh} X_2, \tag{2.46}$$

$$\operatorname{ch}(X_1 + X_2) = \operatorname{ch} X_1 \operatorname{ch} X_2 + \operatorname{sh} X_1 \operatorname{sh} X_2. \tag{2.47}$$

Доказательство формул (2.46), (2.47) идентично: с помощью соотношений (0.11), (2.1) показывается, что правая часть формулы равна ее левой части.

В силу (0.8), (2.46), (2.47)

$$\operatorname{sh}(X_1 - X_2) = \operatorname{sh} X_1 \operatorname{ch} X_2 - \operatorname{ch} X_1 \operatorname{sh} X_2, \tag{2.48}$$

$$\operatorname{ch}(X_1 - X_2) = \operatorname{ch} X_1 \operatorname{ch} X_2 - \operatorname{sh} X_1 \operatorname{sh} X_2. \tag{2.49}$$

В силу (2.46), (2.47) справедливы формулы для операторных гиперболических функций двойного аргумента:

$$\operatorname{sh} 2X = 2 \operatorname{sh} X \operatorname{ch} X, \quad \operatorname{ch} 2X = \operatorname{ch}^2 X + \operatorname{sh}^2 X.$$

Из (2.46)–(2.49) следуют формулы преобразования произведения операторных гиперболических функций в сумму:

$$\operatorname{sh} X_1 \operatorname{ch} X_2 = \frac{1}{2}\bigl[\operatorname{sh}(X_1 + X_2) + \operatorname{sh}(X_1 - X_2)\bigr], \tag{2.50}$$

$$\operatorname{ch} X_1 \operatorname{ch} X_2 = \frac{1}{2}\bigl[\operatorname{ch}(X_1 + X_2) + \operatorname{ch}(X_1 - X_2)\bigr], \tag{2.51}$$

$$\operatorname{sh} X_1 \operatorname{sh} X_2 = \frac{1}{2}\bigl[\operatorname{ch}(X_1 + X_2) - \operatorname{ch}(X_1 - X_2)\bigr]. \tag{2.52}$$

Из (2.50)–(2.52) следуют формулы преобразования суммы и разности одноименных операторных гиперболических функций в произведение:

$$\operatorname{sh} X_1 + \operatorname{sh} X_2 = 2 \operatorname{sh} \frac{X_1 + X_2}{2} \operatorname{ch} \frac{X_1 - X_2}{2}, \tag{2.53}$$

$$\operatorname{sh} X_1 - \operatorname{sh} X_2 = 2 \operatorname{sh} \frac{X_1 - X_2}{2} \operatorname{ch} \frac{X_1 + X_2}{2}, \tag{2.54}$$

$$\operatorname{ch} X_1 + \operatorname{ch} X_2 = 2 \operatorname{ch} \frac{X_1 + X_2}{2} \operatorname{ch} \frac{X_1 - X_2}{2}, \tag{2.55}$$

$$\operatorname{ch} X_1 - \operatorname{ch} X_2 = 2 \operatorname{sh} \frac{X_1 - X_2}{2} \operatorname{sh} \frac{X_1 + X_2}{2}. \tag{2.56}$$

Напомним, что формулы (2.46)–(2.56) справедливы при выполнении условия (2.2).

Укажем одно полезное применение операторных тригонометрических формул.

Пусть $B \in L(E)$, B фиксирован.

Теорема 2.3. *Операторные функции* $Y_1(t) = \sin Bt$, $Y_2(t) = \cos Bt$ *непрерывны на* $\mathbb{R}$.

Доказательство. Пусть $t \in \mathbb{R}$, t фиксировано. Покажем непрерывность функции $Y_1(t)$ во взятой точке t, т. е. покажем, что

$$\lim_{\Delta t \to 0} \Delta Y_1(t) = O, \tag{2.57}$$

где $\Delta Y_1(t) = Y_1(t + \Delta t) - Y_1(t)$. Согласно определению предела, равенство (2.57) означает, что

$$\|\Delta Y_1(t)\| \underset{\Delta t \to 0}{\longrightarrow} 0. \tag{2.58}$$

Используя формулу (2.11), получаем

$$\Delta Y_1(t) = 2\sin\frac{B\Delta t}{2}\cos\Big(Bt + \frac{B\Delta t}{2}\Big). \tag{2.59}$$

Следовательно,

$$\|\Delta Y_1(t)\| \le 2\Big\|\sin\frac{B\Delta t}{2}\Big\|\,\Big\|\cos\Big(Bt + \frac{B\Delta t}{2}\Big)\Big\|. \tag{2.60}$$

Известно (см. [8, с. 132]), что для любого $X \in L(E)$

$$\|\sin X\| \le \operatorname{sh}\|X\|, \tag{2.61}$$

$$\|\cos X\| \le \operatorname{ch}\|X\|. \tag{2.62}$$

В силу оценки (2.61)

$$\Big\|\sin\frac{B\Delta t}{2}\Big\| \le \operatorname{sh}\frac{\|B\|\,|\Delta t|}{2}. \tag{2.63}$$

В силу непрерывности скалярной функции $\operatorname{sh} x$ и равенства $\operatorname{sh} 0 = 0$ справедлив предельный переход $\operatorname{sh}\frac{\|B\|\,|\Delta t|}{2} \underset{\Delta t\to 0}{\to} 0$, следовательно, в силу (2.63)

$$\Big\|\sin\frac{B\Delta t}{2}\Big\| \underset{\Delta t\to 0}{\to} 0. \tag{2.64}$$

В силу (2.4)

$$\cos\Big(Bt + \frac{B\Delta t}{2}\Big) = \cos Bt\cos\frac{B\Delta t}{2} - \sin Bt\sin\frac{B\Delta t}{2},$$

следовательно,

$$\Big\|\cos\Big(Bt + \frac{B\Delta t}{2}\Big)\Big\| \le \big\|\cos Bt\big\|\,\Big\|\cos\frac{B\Delta t}{2}\Big\| + \big\|\sin Bt\big\|\,\Big\|\sin\frac{B\Delta t}{2}\Big\|. \tag{2.65}$$

В силу оценки (2.62)

$$\Big\|\cos\frac{B\Delta t}{2}\Big\| \le \operatorname{ch}\frac{\|B\|\,|\Delta t|}{2}. \tag{2.66}$$

Из непрерывности скалярной функции $\operatorname{ch} x$ и равенства $\operatorname{ch} 0 = 1$ получаем

$$\operatorname{ch}\frac{\|B\|\,|\Delta t|}{2} \underset{\Delta t\to 0}{\to} 1,$$

следовательно, в силу неравенства (2.66) $\big\|\cos\frac{B\Delta t}{2}\big\|$ ограничена при $\Delta t \to 0$. Значит, произведение $\big\|\cos Bt\big\|\,\big\|\cos\frac{B\Delta t}{2}\big\|$ является ограниченной величиной при $\Delta t \to 0$. В силу соотношения (2.64) имеем

$$\big\|\sin Bt\big\|\,\Big\|\sin\frac{B\Delta t}{2}\Big\| \underset{\Delta t\to 0}{\to} 0.$$

Таким образом, правая часть неравенства (2.65) ограничена при $\Delta t \to 0$. Следовательно, левая часть этого неравенства является ограниченной величиной при $\Delta t \to 0$. Тогда, в силу (2.64) правая часть неравенства (2.60) сходится к нулю при $\Delta t \to 0$. Следовательно, справедливо соотношение (2.58). Непрерывность функции $Y_1(t)$ доказана.

Покажем непрерывность функции $Y_2(t)$ во взятой точке t, т. е. покажем, что

$$\|\Delta Y_2(t)\| \underset{\Delta t\to 0}{\to} 0, \tag{2.67}$$

где $\Delta Y_2(t) = Y_2(t+\Delta t) - Y_2(t)$. Используя формулу (2.13), получаем

$$\Delta Y_2(t) = -2\sin\frac{B\Delta t}{2}\sin\Big(Bt + \frac{B\Delta t}{2}\Big). \tag{2.68}$$

Следовательно,

$$\|\Delta Y_2(t)\| \le 2\Big\|\sin\frac{B\Delta t}{2}\Big\|\,\Big\|\sin\Big(Bt + \frac{B\Delta t}{2}\Big)\Big\|. \tag{2.69}$$

В силу (2.3)

$$\sin\Big(Bt + \frac{B\Delta t}{2}\Big) = \sin Bt\cos\frac{B\Delta t}{2} + \cos Bt\sin\frac{B\Delta t}{2},$$

следовательно,

$$\Big\|\sin\Big(Bt + \frac{B\Delta t}{2}\Big)\Big\| \le \big\|\sin Bt\big\|\,\Big\|\cos\frac{B\Delta t}{2}\Big\| + \big\|\cos Bt\big\|\,\Big\|\sin\frac{B\Delta t}{2}\Big\|. \tag{2.70}$$

Выше было показано, что $\big\|\cos\frac{B\Delta t}{2}\big\|$ ограничена при $\Delta t \to 0$. Следовательно, произведение $\big\|\sin Bt\big\|\,\big\|\cos\frac{B\Delta t}{2}\big\|$ является ограниченной величиной при $\Delta t \to 0$. В силу (2.64)

$$\big\|\cos Bt\big\|\,\Big\|\sin\frac{B\Delta t}{2}\Big\| \underset{\Delta t \to 0}{\to} 0.$$

Таким образом, правая часть неравенства (2.70) ограничена при $\Delta t \to 0$. Следовательно, левая часть этого неравенства является ограниченной величиной при $\Delta t \to 0$. Тогда, в силу (2.64) правая часть неравенства (2.69) сходится к нулю при $\Delta t \to 0$. Следовательно, справедлив предельный переход (2.67). Непрерывность функции $Y_2(t)$ установлена. □

Найдем производные функций $Y_1(t)$, $Y_2(t)$. Для этого потребуются следующие утверждения.

Лемма 2.1. *Пусть ряд*

$$\sum_{k=1}^{\infty} F_k \tag{2.71}$$

с членами из алгебры $L(E)$ сходится и его сумма равна S. Тогда при любом фиксированном $H \in L(E)$ ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} HF_k \tag{2.72}$$

сходится и его сумма равна HS:

$$\sum_{k=1}^{\infty} HF_k = H\sum_{k=1}^{\infty} F_k \tag{2.73}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Сходимость ряда (2.71) означает, по определению, что последовательность $\{S_n\}$ его частичных сумм сходится к S, т. е.

$$\|S_n - S\| \to 0. \tag{2.74}$$

Заметим, что частичные суммы $\tilde{S}_n$ ряда (2.72) имеют вид

$$\tilde{S}_n = \sum_{k=1}^{n} HF_k = H\sum_{k=1}^{n} F_k = HS_n.$$

Используя соотношение (2.74), получаем

$$\|\tilde{S}_n - HS\| = \|HS_n - HS\| = \|H(S_n - S)\| \leq \|H\|\,\|S_n - S\| \to 0,$$

следовательно, $\|\tilde{S}_n - HS\| \to 0$, а это означает, по определению, что ряд (2.72) сходится и его сумма равна HS, т. е. справедливо равенство (2.73). □

Рассмотрим функциональный ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} u_k(t), \tag{2.75}$$

членами которого являются функции, определенные на промежутке $[a,b] \subset \mathbb{R}$ со значениями в алгебре $L(E)$.

Теорема 2.4. *Пусть все члены ряда (2.75) непрерывны на $[a,b]$ и этот ряд сходится равномерно на $[a,b]$. Тогда сумма $S(t)$ данного ряда непрерывна на $[a,b]$.*

Доказательство теоремы 2.4 аналогично доказательству теоремы о непрерывности суммы функционального ряда в скалярном случае (см. [12, с. 128]).

В дальнейшем потребуются следующие три утверждения.

Замечание 2.1. Каждый оператор из алгебры $L(E)$ замкнут (см. [13, с. 208]).

Замечание 2.2. Замкнутый оператор можно выносить за знак предела (см. [1, с. 28]).

Замечание 2.3. Замкнутый оператор можно выносить за знак производной (см. [1, с. 28]).

Теорема 2.5. *Операторные функции $Y_1(t)$, $Y_2(t)$ непрерывно дифференцируемы на $\mathbb{R}$ и справедливы формулы*

$$Y_1'(t) = (\sin Bt)' = B\cos Bt, \tag{2.76}$$

$$Y_2'(t) = (\cos Bt)' = -B\sin Bt. \tag{2.77}$$

Доказательство. Пусть $t \in \mathbb{R}$, t фиксировано. Покажем справедливость равенства (2.76), т. е. покажем, что

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta Y_1(t)}{\Delta t} = B\cos Bt. \tag{2.78}$$

В силу (2.59)

$$\frac{\Delta Y_1(t)}{\Delta t} = \left(\frac{\Delta t}{2}\right)^{-1} \sin\frac{B\Delta t}{2} \cos\left(Bt + \frac{B\Delta t}{2}\right). \tag{2.79}$$

Далее,

$$\left(\frac{\Delta t}{2}\right)^{-1} \sin\frac{B\Delta t}{2} = \left(\frac{\Delta t}{2}\right)^{-1} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{B^{2k+1}\left(\frac{\Delta t}{2}\right)^{2k+1}}{(2k+1)!}$$

или

$$\left(\frac{\Delta t}{2}\right)^{-1} \sin\frac{B\Delta t}{2} = \sum_{k=0}^{\infty} B(-1)^k \frac{B^{2k}(\Delta t)^{2k}}{2^{2k}(2k+1)!}. \tag{2.80}$$

С помощью первого признака сравнения и признака Даламбера показывается, что ряд

$$\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{B^{2k}(\Delta t)^{2k}}{2^{2k}(2k+1)!} \tag{2.81}$$

сходится абсолютно, следовательно, этот ряд сходится (см. [8, с. 126]). В силу равенства (2.73) (см. лемму 2.1) из (2.80) получаем

$$\Big(\frac{\Delta t}{2}\Big)^{-1}\sin\frac{B\Delta t}{2}=B\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{B^{2k}(\Delta t)^{2k}}{2^{2k}(2k+1)!}. \tag{2.82}$$

В силу (2.79), (2.82)

$$\frac{\Delta Y_1(t)}{\Delta t}=\Big[B\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{B^{2k}(\Delta t)^{2k}}{2^{2k}(2k+1)!}\Big]\cos\Big(Bt+\frac{B\Delta t}{2}\Big). \tag{2.83}$$

В силу непрерывности функции $Y_2(t)$

$$\lim_{\Delta t\to 0}\cos\Big(Bt+\frac{B\Delta t}{2}\Big)=\cos Bt. \tag{2.84}$$

Нас интересует поведение суммы ряда (2.81) при $\Delta t\to 0$. Поэтому будем в дальнейшем рассматривать этот ряд как функциональный ряд с общим членом

$$u_k(\Delta t)=(-1)^k\frac{B^{2k}(\Delta t)^{2k}}{2^{2k}(2k+1)!}.$$

В силу малости Δt будем считать, что $|\Delta t|\le 1$. Тогда функциональный ряд (2.81) мажорируется на промежутке $[-1,1]$ сходящимся знакоположительным рядом

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\|B\|^{2k}}{2^{2k}(2k+1)!}.$$

Известно (см. [9, с. 160]), что из мажорируемости функционального ряда, членами которого являются функции со значениями в нормированном пространстве, следует равномерная сходимость этого ряда. Значит, функциональный ряд (2.81) сходится равномерно на промежутке $[-1,1]$. Кроме того, члены $u_k(\Delta t)$ этого ряда непрерывны на $[-1,1]$. Следовательно, в силу теоремы 2.4 сумма $S(\Delta t)$ ряда (2.81) непрерывна на промежутке $[-1,1]$. Значит, для ряда (2.81) возможен почленный переход к пределу, в частности,

$$\begin{aligned}\lim_{\Delta t\to 0}\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{B^{2k}(\Delta t)^{2k}}{2^{2k}(2k+1)!}&=\lim_{\Delta t\to 0}\Big[I+\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\frac{B^{2k}(\Delta t)^{2k}}{2^{2k}(2k+1)!}\Big]\\&=I+\sum_{k=1}^{\infty}\lim_{\Delta t\to 0}\frac{(-1)^kB^{2k}(\Delta t)^{2k}}{2^{2k}(2k+1)!}=I+O=I.\end{aligned} \tag{2.85}$$

Учитывая замечания 2.1, 2.2 и равенство (2.85), получаем

$$\lim_{\Delta t\to 0}\Big[B\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{B^{2k}(\Delta t)^{2k}}{2^{2k}(2k+1)!}\Big]=B\lim_{\Delta t\to 0}\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{B^{2k}(\Delta t)^{2k}}{2^{2k}(2k+1)!}=B. \tag{2.86}$$

Из соотношений (2.83), (2.84), (2.86) следует равенство (2.78). Формула (2.76) доказана.

Покажем справедливость формулы (2.77), т. е. покажем, что

$$\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta Y_2(t)}{\Delta t} = -B\sin Bt. \tag{2.87}$$

В силу (2.68)

$$\frac{\Delta Y_2(t)}{\Delta t} = -\Big(\frac{\Delta t}{2}\Big)^{-1}\sin\frac{B\Delta t}{2}\sin\Big(Bt+\frac{B\Delta t}{2}\Big). \tag{2.88}$$

В силу непрерывности функции $Y_1(t)$

$$\lim_{\Delta t\to 0}\sin\Big(Bt+\frac{B\Delta t}{2}\Big) = \sin Bt. \tag{2.89}$$

В силу (2.82), (2.86)

$$\lim_{\Delta t\to 0}\Big[\Big(\frac{\Delta t}{2}\Big)^{-1}\sin\frac{B\Delta t}{2}\Big] = B. \tag{2.90}$$

Из соотношений (2.88)–(2.90) следует равенство (2.87). Формула (2.77) доказана. Из равенств (2.76), (2.77) видно, в силу непрерывности функций $\sin Bt$, $\cos Bt$ на $\mathbb{R}$, что производные $Y_1'(t)$, $Y_2'(t)$ непрерывны на $\mathbb{R}$, т. е. функции $Y_1(t)$, $Y_2(t)$ непрерывно дифференцируемы на $\mathbb{R}$. $\square$

Учитывая формулы (2.76), (2.77), включение $B^n \in L(E)$, $n\in\mathbb{N}$, и замечания 2.1, 2.3, получаем

Следствие 2.2. *Функции $Y_1(t)$, $Y_2(t)$ бесконечно дифференцируемы на $\mathbb{R}$ и для любого $m\in\mathbb{N}$ справедливы формулы*

$$(\sin Bt)^{(m)} = \begin{cases} (-1)^{l+1}B^m\cos Bt, & m=2l-1,\\ (-1)^l B^m\sin Bt, & m=2l;\end{cases}$$

$$(\cos Bt)^{(m)} = \begin{cases} (-1)^{l}B^m\sin Bt, & m=2l-1,\\ (-1)^l B^m\cos Bt, & m=2l.\end{cases}$$

Для операторной экспоненты $Y(t)=e^{At}$ (здесь $A\in L(E)$, A фиксирован) имеем

$$Y'(t) = Ae^{At} \tag{2.91}$$

(см. [2, с. 41]). Учитывая формулу (2.91), включение $A^n\in L(E)$, $n\in\mathbb{N}$, и замечания 2.1, 2.3, получаем: функция $Y(t)$ бесконечно дифференцируема на $\mathbb{R}$ и для любого $m\in\mathbb{N}$ справедлива формула $Y^{(m)}(t)=A^m e^{At}$.

В перспективе естественный интерес представляет исследование вопросов, связанных с дифференцированием и интегрированием операторных функций семейства (0.2), в частности, конкретных функций из этого семейства, рассмотренных в данной работе. Интеграл Римана для функций из семейства (0.2) построен в [14].

Результаты данной работы анонсированы в [15].

References

[1] С. Г. Крейн, *Линейные дифференциальные уравнения в банаховом пространстве*, Наука, М., 1967. [S. G. Kreyn, *Linear Differential Equations in a Banach space*, Nauka Publ., Moscow, 1967 (In Russian)].

[2] Ю. Л. Далецкий, М. Г. Крейн, *Устойчивость решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве*, Наука, М., 1970. [Y. L. Daleckiy, M. G. Kreyn, *Stability of Solutions of Differential Equations in a Banach Space*, Nauka Publ., Moscow, 1970 (In Russian)].

[3] *Функциональный анализ*, Справочная математическая библиотека, ред. С. Г. Крейн, Наука, М., 1972. [*Functional Analysis*, Reference Math Library, ed. S. G. Krein, Nauka, Moscow, 1972 (In Russian)].

[4] А. Н. Талдыкин, *Элементы прикладного функционального анализа*, Высш. школа, М., 1982. [A. N. Taldykin, *Elementy Prikladnogo Funkcionalnogo Analiza*, Vyssh. shk. Publ., Moscow, 1982 (In Russian)].

[5] В. И. Фомин, "Об общем решении линейного однородного дифференциального уравнения в банаховом пространстве в случае комплексных характеристических операторов", *Вестник Тамбовского университета. Серия: естественные и технические науки*, **24**:126 (2019), 211–217. [V. I. Fomin, "About a general solution of a linear homogeneous differential equations in a Banach space in the case of complex characteristic operators", *Tambov University Reports. Series: Natural and Technical Sciences*, **24**:126 (2019), 211–217 (In Russian)].

[6] В. И. Фомин, "О случае комплексных корней характеристического операторного полинома линейного однородного дифференциального уравнения n-го порядка в банаховом пространстве", *Дифференциальные уравнения*, **56**:8 (2020), 1045–1054; англ. пер.:V. I. Fomin, "On the Case of Complex Roots of the Characteristic Operator Polynomial of a Linear nth-Order Homogeneous Differential Equation in a Banach Space", *Differential Equations*, **56**:8 (2020), 1021–1030.

[7] В. А. Треногин, Б. М. Писаревский, Т. С. Соболева, *Задачи и упражнения по функциональному анализу*, Физматлит, М., 2002. [V. A. Trenogin, B. M. Pisarevskij, T. S. Soboleva, *Problems and Exercises in Functional Analysis*, Fizmatlit Publ., Moscow, 2002 (In Russian)].

[8] В. А. Треногин, *Функциональный анализ*, Наука, М., 1980. [V. A. Trenogin, *Functional Analysis*, Nauka Publ., Moscow, 1980 (In Russian)].

[9] Л. Шварц, *Анализ.* Т. 1, Мир, М., 1972. [L. Schwartz, *Analysis.* V. 1, Mir Publ., Moscow, 2002 (In Russian)].

[10] А. Н. Колмогоров, С. В. Фомин, *Элементы теории функций и функционального анализа*, Наука, М., 1976. [A. N. Kolmogorov, S. V. Fomin, *Elements of the Theory of Functions and Functional Analysis*, Nauka Publ., Moscow, 1976 (In Russian)].

[11] В. И. Фомин, "Об основном свойстве комплексной операторной экспоненциальной функции комплексного операторного аргумента", *Вестник российских университетов. Математика*, **24**:127 (2019), 324–332. [V. I. Fomin, "About a complex operator exponential function of a complex operator argument main property", *Russian Universities Reports. Mathematics*, **24**:127 (2019), 324–332 (In Russian)].

[12] А. И. Герасимович, Н. П. Кеда, М. Б. Сугак, *Математический анализ. Часть 2*, Высш. шк., Минск, 1990. [A. I. Gerasimovich, N. P. Keda, M. B. Sugak, *Mathematical Analysis. Part 2*, Vyssh. shk. Publ., Minsk, 1990 (In Russian)].

[13] Т. Като, *Теория возмущений линейных операторов*, Мир, М., 1972. [T. Kato, *Perturbation Theory for Linear Operators*, Mir Publ., Moscow, 1972 (In Russian)].

[14] В. И. Фомин, "Об интеграле Римана операторной функции операторного переменного", *Воронежская зимняя математическая школа С. Г. Крейна*, Материалы международной конференции (Воронеж), Тезисы докладов, 2022, 232–234. [V. I. Fomin, "On the Riemann integral of an operator function of an operator variable", *Voronezh Winter Mathematical School S. G. Krein*, Materials of the International Conference (Voronezh), Abstracts, 2022, 232–234 (In Russian)].

[15] В. И. Фомин, "Об операторных функциях операторного переменного", *Воронежская весенняя математическая школа*, Материалы международной конференции (Воронеж), Тезисы докладов, 2022, 278–279. [V. I. Fomin, "On the operator functions of an operator variable", *Voronezh Spring Mathematical School*, Materials of the International Conference (Voronezh), Abstracts, 2022, 278–279 (In Russian)].

Информация об авторе

Фомин Василий Ильич, кандидат физико-математических наук, доцент. Тамбовский государственный университет им. Г. Р. Державина, г. Тамбов, Российская Федерация. E-mail: vasiliyfomin@bk.ru
ORCID: http://orcid.org/0000-0003-3846-4882

Поступила в редакцию 04.10.2022 г.
Поступила после рецензирования 26.01.2023 г.
Принята к публикации 10.03.2023 г.

Information about the author

Vasiliy I. Fomin, Candidate of Physics and Mathematics, Associate professor. Derzhavin Tambov State University, Tambov, Russian Federation. E-mail: vasiliyfomin@bk.ru
ORCID: http://orcid.org/0000-0003-3846-4882

Received 04.10.2022
Reviewed 26.01.2023
Accepted for press 10.03.2023